Prof. Amador Martin-Pizarro
Dr. Daniel Palacin

Albert-Ludwigs-Universität Freiburg
Wintersemester 2018/2019

Bewertete Körper

Blatt 11

Abgabe: 28.01.2019

Aufgabe 1 (4 Punkte)**.**
Ist $\mathbb{Q}_p$ eine algebraische Erweiterung von $\mathbb{Q}$?

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.**
Für $p > 2$, sei ω eine $(p-1)$-Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p$ derart, dass $\omega \equiv 1 \bmod p$.

(a) Zeige, dass $\omega \equiv 1 \bmod p^{r-1}$ für jedes $r \neq 0$ aus $\mathbb{N}$.

(b) Schliesse daraus, dass die Einheitswurzel ω gleich 1 sein muss.

Aufgabe 3 (12 Punkte)**.**
Sei $p \neq 2$ eine Primzahl.

(a) Zeige, dass ein primitives Polynom über $\mathbb{Q}_p$ genau dann irreduzibel über $\mathbb{Q}_p$ ist, wenn es über $\mathbb{Z}_p$ irreduzibel ist.

(b) Zeige, dass $\mathbb{Q}_p$ das *Eisenstein'sche Kriterium* erfüllt: gegeben ein normiertes Polynom $f = T^n + \sum\limits_{i \leq n-1} a_i T^i$ über $\mathbb{Z}_p$ derart, dass jedes a_i durch p in $\mathbb{Z}_p$ teilbar sind, aber $p^2 \nmid a_0$, dann ist f irreduzibel über $\mathbb{Q}_p$.

Sei nun η eine primitive p-te Einheitswurzel in $\mathbb{Q}_p^{alg}$ und sei $\tilde{O}$ der ganze Abschluss von $\mathbb{Z}_p$ auf $\mathbb{Q}_p(\eta)$.

(c) Beschreibe das Minimalpolynom von η.

Hinweis: $\eta^{p-1} + \ldots + \eta + 1 = 0$.

Insbesondere ist die Norm $\mathrm{N}_{\mathbb{Q}_p(\eta)/\mathbb{Q}_p}(\eta - 1) = \mathrm{N}_{\mathbb{Q}_p(\eta)/\mathbb{Q}_p}(1 - \eta) = p$.

(d) Schließe daraus, dass

$$(1-\eta)^{p-1} \frac{1-\eta^2}{1-\eta} \cdots \frac{1-\eta^{p-1}}{1-\eta} = p.$$

(e) Der Wilson'sche Satz besagt, dass $(p-1)! \equiv -1 \bmod p$. Schließe daraus, dass das Element $u = -\frac{1-\eta^2}{1-\eta} \cdots \frac{1-\eta^{p-1}}{1-\eta}$ eine Einheit in $\tilde{O}$ ist, welche mit 1 kongruent ist. Insbesondere liegt $u^{1/p-1}$ in $\tilde{O} \subset \mathbb{Q}_p(\eta)$.

(f) Schließe daraus, dass jede $(p-1)$-Wurzel von $-p$ bereits in $\mathbb{Q}_p(\eta)$ liegt. Folgt es aus dem Krasner'schen Lemma?

Abgabe der Übungsblätter in den Briefkasten 3.29 im UG der Ernst-Zermelo-Strasse 1. Die Übungsblätter müssen bis 10 Uhr am jeweils angegebenen Abgabedatum eingeworfen werden.